

# La Proper Generalized Decomposition appliqué à la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes pour le calcul des vibrations moyennes fréquences dans une bande de fréquence

A. Barbarulo<sup>a</sup>, P. Ladevèze<sup>a,b</sup>, H. Riou<sup>a</sup>

a. LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/Univ. Paris 6, PRES UniverSud Paris) 61 av du Pr. Wilson,  
F-94230 CACHAN, France

b. EADS Foundation Chair “Advanced Computational Structural Mechanics”

## Résumé :

*De nos jours, les problèmes d’acoustique pour les vibrations moyennes fréquences suscitent un grand intérêt de la part des industriels. Néanmoins, leur prédictions numériques restent toujours un problème ouvert dans le monde de la recherche scientifique, car les méthodes classiques (telle que FEM, SEA) ne fonctionnent pas dans cette gamme de fréquences. La méthode appelée Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) est une méthode numérique qui permet de le faire. Dans ce papier l’accent sera en particulier mis sur sa capacité à calculer les solutions sur des bandes de fréquences, grâce à une méthode de réduction de modèle a priori, la Proper Generalized Decomposition (PGD).*

## Abstract :

*In recent years a growing interest in mid frequency problems has appeared. In this particular frequency range none of classic techniques (FEM, SEA) are suited. Several methods have been developed to solve mid frequency problem, one of them is the Variational Theory of Complex Rays (VTCR), in order to compute slightly damped elastic structures vibrations in the medium-frequency range. In this paper a new computational approach is proposed to improve VTCR efficiency over a frequencies range. Wave amplitudes for acoustic problems over a broad band are approximated through a Proper Generalized Decomposition (PGD). PGD is a model reduction technique which leads to construction of separated variables representations of the solution of models defined in tensor product spaces.*

**Mots clefs :** TVRC ; PGD ; Moyennes fréquences.

## 1 Introduction

De nos jours, les industries aéronautiques et automobiles s’intéressent fortement aux problèmes de vibrations dans le domaine des moyennes fréquences. Le développement d’outils numériques prédictifs devient une de leurs principales préoccupations, car ils permettent de réduire les coûts des essais. Or actuellement, la méthode des éléments finis (FEM [1]) ou la méthode des éléments de frontières (BEM [2]) ne permettent pas d’effectuer des simulations dans les gammes de fréquences aussi élevées qu’on le souhaiterait, car les discrétisations qu’elles utilisent aboutissent à des problèmes de très grandes tailles qui sont soumis à des difficultés numériques comme l’effet de pollution (voir [3]). Par ailleurs, les méthodes «hautes fréquences» comme l’analyse statistique de l’énergie (SEA [4]) et ses dérivées fournissent des informations trop globales.

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) est une méthode qui fait partie de celles développées pour faire face à ces difficultés. Elle a été introduite pour la première fois dans [5]. Elle se base sur une formulation variationnelle du problème à résoudre qui permet aux approximations

de chaque sous domaines d'être indépendantes, offrant ainsi une grande flexibilité et donc efficacité dans le choix des fonctions de forme. Elle utilise une approximation basées sur des ondes de vibration propagatives et évanescences, ce qui lui permet d'offrir des taux de convergence exponentiels (voir [6]). D'autres méthodes numériques utilisent également une base d'ondes de vibration pour rechercher des approximations, comme par exemple la Ultra Weak Variational Method ([7]), la Least Squares Method ([8]), la Wave Boundary Method ([9]), la PUM ([10]), la DEM ([11]) ou encore la Wave based Method ([12]). Les différences entre ces méthodes sont liées à la formulation variationnelle utilisée, aux fonctions de forme choisies et au traitement des conditions aux limites entre les sous domaines de calcul.

Par ailleurs, le calcul sur des bandes de fréquences est une autre problématique qui intéresse les industriels. En effet, dans le domaine des moyennes fréquences, les calculs fréquence par fréquence sont rapidement numériquement coûteux, et des techniques de résolutions adaptées deviennent nécessaires. Ce problème a déjà été étudié dans le cadre de la TVRC (voir [13]), et les solutions proposées se basaient sur l'exploitation de la dépendance explicite des matrices vis-a-vis de la fréquence.

Dans cet article, la problématique du calcul de l'état vibratoire sur des bandes de fréquences grâce à la TVRC est reprise, mais via une technique de réduction de modèle appelée PGD (voir [14], [15], [16], [17]). La solution du problème est recherchée sous la forme d'une somme de produits d'une fonction de l'espace et d'une fonction de la fréquence. Cette approche, utilisée dans le cadre d'un problème d'acoustique défini dans le paragraphe 2, réécrit dans le contexte de la TVRC dans le paragraphe 3, sera décrite dans le paragraphe 4. Sa performance sera illustrée sur un exemple numérique dans 5. Les conclusions de cette étude, ainsi que les pistes de développement futurs seront évoqués dans le dernier paragraphe.

## 2 Problème de reference

Soit  $\Omega_{aE}$  en ensemble de  $n_{el}$  cavités acoustiques en 2D remplies d'un fluide incompressible, reliées le long de frontières communes  $\Gamma_{EE'}$ . Le problème de reference à résoudre est :

Trouver  $p_E(\underline{x})$  pour  $\underline{x} \in \Omega_{aE}$   $E \in [1, \dots, n_{el}]$  tel que :

$$\Delta p_E + k_a^2 p_E = 0 \quad \text{dans } \Omega_{aE} \quad (1)$$

$$\begin{cases} p_E = p_{dE} & \text{sur } \partial_p \Omega_{aE} & (a) \\ L_v[p_E] = v_{dE} & \text{sur } \partial_v \Omega_{aE} & (b) \\ p_E - Z_E L_v[p_E] = h_{dE} & \text{sur } \partial_Z \Omega_{aE} & (c) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} p_E - p_{E'} = 0 & \text{sur } \Gamma_{EE'} \\ L_v[p_E] + L_v[p_{E'}] = 0 & \text{sur } \Gamma_{EE'} \end{cases} \quad (3)$$

où  $k_a$  est le vecteur d'onde acoustique,  $L_v[p_E] = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_E}{\partial \mathbf{n}}$  l'opérateur de vitesse,  $Z_E$  l'impédance normale. Les conditions aux limites sur les bords sont reliées à la pression imposée (2-a), la vitesse imposée (2-b), l'impédance (2-c), et la continuité en pression et en vitesse entre les sous cavités acoustiques (3).

## 3 Formulation variationnelle et approximation

La formulation TVRC est obtenue par la réécriture sous forme faible du problème aux limites (1-2-3). Soit  $A_{ad}^E$  l'espace fonctionnel défini par :

$$A_{ad}^E = \left\{ p_E \mid \Delta p_E + k_a^2 p_E = 0, \forall \underline{x} \in \Omega_{aE} \right\} \quad (4)$$

il peut être démontré (voir [6]) que le problème (1-2-3) est équivalent au problème variationnel suivant : Trouver  $p_E \in A_{ad}^E$ , tel que :

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_{aE}} \Re \left\{ \int_{\partial_p \Omega_E} (p_E - p_{dE}) \overline{L_v[\delta p_E]} ds + \int_{\partial_v \Omega_E} (\overline{L_v[p_E] - v_{dE}}) \delta p_E ds \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \int_{\partial_Z \Omega_E} \left[ ((1 - Z_E L_v)[p_E] - h_{dE}) \overline{L_v[\delta p_E]} ds + ((\overline{L_v - 1/Z_E}[p_E] + h_{dE}/Z_E) \delta p_E) ds \right] \right\} \\ & + \sum_{\Gamma_{EE'}} \Re \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{EE'}} \left( (p_E - p_{E'}) \overline{L_v[\delta p_E - \delta p_{E'}]} + \overline{L_v[p_E + p_{E'}]} (\delta p_E + \delta p_{E'}) \right) ds \right\} \quad \forall \delta p_E \in A_{ad}^E \end{aligned} \quad (5)$$

Le principe de la TVRC est de trouver une solution approchée  $p^h \in A_{ad}^{E,h}$  du problème variationnel (5). Grâce à la flexibilité de la formulation variationnelle, n'importe quelle fonction qui définit (4), peut être choisie. Le choix qui est retenu ici est une solution qui prend en comptes les ondes planes se propageant dans toutes les directions de  $\Omega_{aE}$  :

$$p_E^h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} X_E^h(\theta) e^{ik(\theta)x} d\theta \quad (6)$$

$X_E^h$  est l'amplitude des ondes qui se propagent selon le direction  $\theta$  et est décrite ici par sa decomposition en séries de Fourier sur les  $2N + i$  premiers termes :

$$X_E^h(\theta) = \sum_{n=-N}^N x_{E,n}^h \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \quad (7)$$

Ce choix s'inscrit dans la continuité des travaux décrits dans ([18]), qui ont montré de bonnes propriétés numériques. Une fois que cette approximation est injectée dans la formulation, le problème (5) se réécrit :

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,n_{el}} \\ & \ddots & \vdots \\ K_{n_{el},1} & \dots & K_{n_{el},n_{el}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_{el}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n_{el}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ou sous forme synthétique :

$$KX = F \quad (9)$$

où  $K_{i,j}$  and  $F_i$  sont respectivement les matrices de la forme bilinéaire et les vecteurs de la forme linéaire de la formulation variationnelle (5), calculés pour l'ensemble des fonctions de test dans toutes les sous-cavités  $\Omega_{aE}$ . Le vecteur  $x_i$  est le vecteur des amplitudes des fonctions de forme utilisées dans  $\Omega_{ae}$  (voir l'équation (7)).

## 4 Proper Generalized Decomposition appliqué à la TVRC

Malgré sa grande efficacité, la TVRC peut conduire à des coûts de calcul élevés si on veut calculer la solution dans une bande de fréquence. Des études ont déjà permis le calcul de la solution d'une bande de fréquence (voir [13]). Elles se basaient sur l'exploitation de la dépendance explicite des matrices vis-a-vis de la fréquence. L'approche qui est développée ici se base sur la PGD (voir [14], [15], [16], [17]).

Le problème consiste à trouver  $X(\omega), \omega \in ]\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega[$ , tel que :

$$K(\omega)X(\omega) = F(\omega) \quad (10)$$

Cette approche recherche une approximation des coefficients d'amplitude  $X(\omega)$  sur une base réduite, en séparant la contribution polaire " $\theta$ " et la contribution dépendant de la fréquence " $\omega$ " :

$$X(\theta, \omega) \approx X^m(\theta, \omega) = \sum_{i=1}^m \hat{X}_i(\theta) \hat{\alpha}_i(\omega) \quad (11)$$

où  $\hat{X}_i(\theta)$  sont des fonctions polaires et  $\hat{\alpha}_i(\omega)$  sont des fonctions dépendant de la fréquence. La matrice  $K$  étant non symétrique c'est l'approche PGD de Petrov-Galerkin [19] qui a été retenue avec une optimisation dédiée à des problèmes de bande de moyenne fréquence.

En définissant :

$$(A, B) = \int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} AB \, d\omega \quad (12)$$

l'équation (10) abouti à

$$(KX, Y^*) = (F, Y^*) \quad \forall Y^* \quad (13)$$

où  $Y^*$  est solution d'un problème adjoint associé à  $X^*$ , défini par :

$$(X^{**}, \bar{K}Y^*) = (X^{**}, HX^*) \quad \forall X^{**} \in R^n \quad (14)$$

où  $\bar{K}$  est le complexe conjugué de  $K$  et  $H$  un opérateur défini par :

$$H = \tilde{H}\tilde{h}(\omega) \quad (15)$$

où  $\tilde{h}(\omega)$  est une fonction lente de la fréquence et où  $\tilde{H}$  est supposée constante.  $Y^*$  étant la solution d'un problème adjoint à  $X^*$ , on peut l'écrire comme une somme de variables séparées

$$Y(\theta, \omega) \approx Y^m(\theta, \omega) = \sum_{i=1}^m \hat{Y}_i(\theta) \hat{\beta}_i(\omega) \quad (16)$$

En injectant (11) et (16) dans (14) et en minimisant le produit scalaire de (14) par rapport à  $\omega$  et  $\theta$ , on obtient :

$$\hat{\beta} \bar{K} \hat{Y} \hat{X} = \bar{\tilde{H}} \hat{X} \hat{X} \tilde{h} \hat{\alpha} \quad (17)$$

$$(\bar{K} \hat{\beta} \hat{\alpha}) \hat{Y} = \tilde{H} \hat{X} (\tilde{h} \hat{\alpha}^2) \quad (18)$$

De plus en considérant l'expression du résidu  $R_m = F - KX^m$ , il est possible d'imposer l'orthogonalité par rapport à  $Y^*$  :

$$(R_m, \delta Y^m) = 0 \quad \forall \delta Y^m \quad (19)$$

où  $\delta Y^m = \sum_{i=1}^m (\delta \hat{\alpha}_i \hat{Y}_i + \hat{\alpha}_i \delta \hat{Y}_i)$ . On en déduit donc :

$$\hat{\alpha} \bar{K} \hat{X} \hat{Y} = R_m \hat{Y} \quad (20)$$

$$(K \hat{\alpha} \hat{\beta}) \hat{X} = (R_m \hat{\beta}) \quad (21)$$

La résolution des quatre équations, (17), (18), (20) et (21), permet de trouver les quatre inconnues du problème,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$ . Un algorithme itératif a été mis en place pour arriver au calcul des inconnues. Il s'écrit :

- 1) : pour  $m = 1$  jusqu'à  $m = m_{max}$
- 2) : initialisation de  $\hat{\alpha}$  et de  $\hat{\beta}$
- 3) : pour  $k = 1$  jusqu'à  $k = k_{max}$
- 4) : calcul de  $\hat{X}$  avec (18) et  $\hat{Y}$  avec (17)
- 5) : normalisation de  $\hat{X}$  et de  $\hat{Y}$
- 6) : calcul de  $\hat{\alpha}$  avec (20) et de  $\hat{\beta}$  avec (21)
- 7) : contrôle de convergence
- 8) : fin boucle
- 9) : on pose  $\hat{X}_m = \hat{X}$  et on pose  $\hat{\alpha}_m = \hat{\alpha}$
- 10) : calcul de  $R_m = R_m - \hat{X}_m \hat{\alpha}_m$
- 11) : contrôle de convergence
- 12) : fin boucle
- 13) :  $X^m = \sum_{i=1}^{m_{max}} \hat{X}_i \hat{\alpha}_i$

## 5 Exemple numérique

Prenons l'exemple défini sur la figure 1. La géométrie est définie par trois sous-cavités acoustiques remplies d'un fluide de densité  $\rho$  et avec une vitesse du son  $c$ , soumises à des conditions limites en vitesse  $V$ , en pression  $P$  et de Robin  $Z$  tel que :

$$\begin{aligned}\rho &= 1.25 \quad [kg/m^3] \\ c &= 340 \quad [m/s] \\ V &= 1 \quad [m/s] \\ P &= 0 \quad [Pa] \\ Z &= 845 + i50 \quad [Pa \cdot s/m] \\ \eta &= 1\% \\ \omega_0 &= 2\pi \times 1900 \quad [Hz] \\ \Delta\omega &= 2\pi \times 100 \quad [Hz] \\ \omega &= [\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]\end{aligned}$$

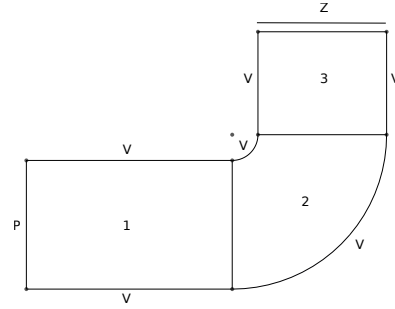


FIGURE 1 – Cavité acoustique en forme de L

La figure 2 montre la convergence de la norme  $L^2$  du résidu  $R_m$  (voir l'équation 19). La figure 3 montre une comparaison entre l'énergie totale dans le système obtenu avec une approche TVRC classique et l'énergie totale obtenue avec une approche PGD en considérant 10 couples ( $m = 10$ ) pour représenter la solution. La bonne concordance entre les deux énergies donne une idée de la fiabilité de la méthode PGD appliquée à des problèmes de large bande.

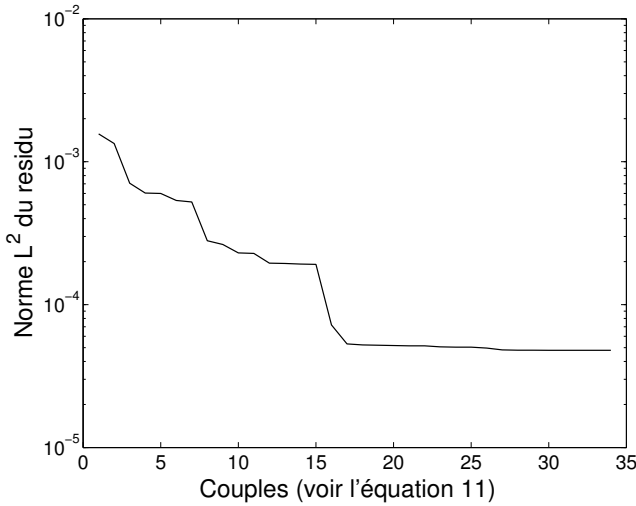


FIGURE 2 – Convergence du résidu  $R_m$  pour le problème défini en figure 1

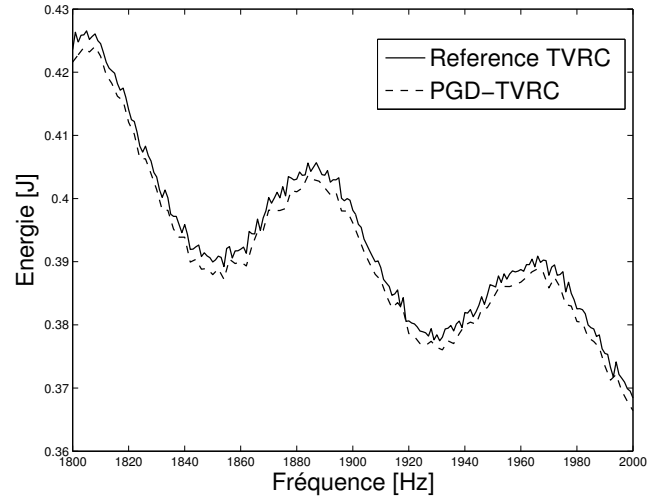


FIGURE 3 – Comparaison entre l'énergie totale de la TVRC et la TVRC-PGD pour le problème défini en figure 1

## 6 Conclusions

Dans cet article, la Proper Generalized Decomposition (PGD) a été appliquée à la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) pour résoudre des problèmes de vibration en moyenne fréquence sur des bandes de fréquence. La version Petrov-Galerkin de la PGD pour la TVRC en sa version Fourier a été décrite. Cette approche a été illustrée avec un exemple de vibration acoustique en 2D. Les résultats obtenus permettent d'envisager l'utilisation de cette approche pour des cas plus complexes et plus réalistes. Les travaux en cours concernent les analyses des performances.

## 7 Remerciement

Les auteurs remercient le projet ITN Marie Curie GA-214909 "MID-FREQUENCY - CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics"

## Références

- [1] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1977.
- [2] P. K. Banerjee and R. Butterfield, *Boundary Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
- [3] A. Deraemaeker, I. Babuska and P. Bouillard, *Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions*. International Journal in Numerical Methods in Engineering, 46 (1999), pp. 471-499.
- [4] R. H. Lyon, *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems*, M.I.T. Press, 1975.
- [5] P. Ladevèze, *A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range*, Comptes Rendus Acadmie des Sciences Paris, 322(IIb) (1996), pp. 849-856.
- [6] H. Riou, P. Ladevèze and B. Sourcis, *The multiscale VTCR approach applied to acoustics problems*, Journal of Computational Acoustics, 16(4) (2008), pp. 487-505.
- [7] O. Cessenat and B. Despres, *Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35(1) (1998), pp. 255-299.
- [8] P. Monk and D.Q. Wang, *A least-squares method for the helmholtz equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 175 (1999), pp. 121-136.
- [9] E. Perrey-Debain, J. Trevelyan, and P. Bettess, *Wave boundary elements : a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 28(2) (2004), pp. 131-141.
- [10] J.M. Melenk and I. Babuska. *Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 4 :607-632, 1997.
- [11] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca, *The discontinuous enrichment method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190 (2001), pp. 6455-6479.
- [12] W. Desmet, P. Sas and D. Vandepitte, *An indirect trefftz method for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 8 (2001), pp. 271-288.
- [13] P. Ladevèze, H. Riou, *Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), pp. 3167-3191.
- [14] P. Ladevèze, *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer-Verlag, (1999).
- [15] F. Chinesta, A. Ammar, F. Lemarchand, P. Beauchene, F. Boust, *Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197 (2008), pp. 400-413.
- [16] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings, *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 144(2- 3) (2007) pp.98121.
- [17] A. Nouy, P. Ladèvze, *Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial type approximation technique for solving micro problems*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, 170(2) (2003), pp. 557-574.
- [18] L. Kovalevsky, P. Ladevèze and H. Riou, *The Variational Theory of Complex Rays for Helmholtz equation : effect of choice of Fourier series*, submitted.
- [19] A. Nouy, *A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 (2010), pp. 1603-1626.